Problem 1

1) f1 = {<0, 0>, <1, 0>} f2 = {<0, 0>, <1, 1>}

f3 = {<0, 1>, <1, 0>} f4 = {<0, 1>, <1, 1>}

2)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ° | f1 | f2 | f3 | f4 |
| f1 | f1 | f1 | f4 | f1 |
| f2 | f1 | f2 | f3 | f4 |
| f3 | f4 | f3 | f2 | f1 |
| f4 | f4 | f4 | f1 | f4 |

Problem 2

1) 封闭 2) 不封闭 3) 封闭 4) 加法不封闭, 乘法封闭

5) 不封闭 6) 封闭 7) 封闭 8) 加法不封闭, 乘法封闭

9) 加法不封闭,乘法封闭 10) 加法不封闭, 乘法封闭

Problem 3

1) f1, f2, f3, f4, f5, f6均为R是的二元运算

2) f1: 可交换, 可结合, 不幂等 f2: 不可交换, 不可结合, 不幂等

f3: 可交换, 可结合, 不幂等 f4: 可交换, 可结合, 幂等

f5: 可交换, 可结合, 幂等 f6: 可交换, 不可结合, 不幂等

3) f1: 单位元0, 无零元, 逆元-x f2: 无单位元, 无零元, 无可逆元素

f3: 单位元1, 零元0, 逆元1/x f4: 无单位元, 无零元, 无可逆元素

f5: 无单位元, 无零元, 无可逆元素 f6: 无单位元, 无零元, 无可逆元素

Problem 4

1) 能构成代数系统, 满足交换律, 满足结合律, 无单位元, 零元是1

2) 不能构成代数系统, 如3\*10 = lcm(3, 10) = 30 ∉ S

3) 能构成代数系统, 满足交换律, 满足结合律, 单位元是10, 零元是1

4) 不能构成代数系统, 如1\*2 = 0 ∉ S

Problem 5

1) 是代数系统, 适合交换律, 适合结合律, 单位元是常函数f(x) = 0, 无零元

2) 是代数系统, 不适合交换律, 不适合结合律, 无单位元, 无零元

3) 是代数系统, 适合结合律, 适合结合律, 单位元是常函数f(x) = 1, 无零元

4) 不是代数系统, 如对g(x) = 0 不存在(f/g)(x).

Problem 6

设二元运算\*不可交换也不可结合, 则a\*b≠b\*a, (a\*b)\*a≠a\*(b\*a)

设a\*b = a, b\*a = b, 有a\*a≠a\*b = a, a\*a = b,

又(b\*a)\*b≠b\*(a\*b), 有b\*b≠b\*a = b, b\*b = a.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| \* | a | B |
| a | b | a |
| b | b | a |

Problem 7

1) 能, x的某次幂可以被16整除↔x为偶数(x=2k, x^4=16x^4可以被16整除)

设x=2k, y=2t, x+y=2(k+t)仍为偶数, x+y属于这个子集, 运算封闭.

2) 不能, 如该子集中有元素4, 6, 4+6=10, 10与5不互素, 故不属于这个子集.

3) 不能, 如30有因子2, 5, 2+5=7, 7不是30的因子, 故不属于这个子集.

4) 能, 设x=30a, y=30b, x+y=30(a+b)仍为30倍数, x+y属于这个子集, 运算封闭.

Problem 8

1) a\*b=b\*a, a\*c=c\*a, b\*c=c\*b, \*满足交换律,

若x, y, z中有a, x, y, z任有一个为a则(x\*y)\*z = a, x\*(y\*z) = a,

若x, y, z中无a, x, y, z任有一个为c则(x\*y)\*z = c, x\*(y\*z) = c.

(b\*b)\*b = b\*(b\*b) = b, 则\*满足结合律,

a\*a = a, b\*b = b, c\*c = c, \*满足幂等律.

单位元是b, 零元是a, a不可逆, b的逆元是b, c不可逆.

2) a°b = a, b°a = b, a°b≠b°a, °不满足交换律,

x°(y°z) = x°y = x, (x°y)°z = x°z = x, °满足结合律,

a°a = a, b°b = b, c°c = c, °满足幂等律.

无单位元, 无零元, a, b, c不可逆.

3) a·b = b, b·a = a, a·b≠b·a, ·不满足交换律,

a·b = a·(a·b) = (x·y)·b = b, 其中(x, y)≠(a, b), (a·c)·b = b, a·(c·b) = a·a = a

(a·c)·b ≠ a·(c·b), ·不满足结合律,

b·b = a≠b, c·c = a≠c, ·不满足幂等律.

无单位元, 无零元, a, b, c不可逆.